مخاطب گرامی! به احترام
تهیه‌کنندگان این فایل، از بازنشر
غیرمجاز آن بپرهیزید.

ریاضی عمومی۲

رایگان

کد محصول:
۱۰۱۳

ویرایش:
بهار۱۳۹۹

www.Amad-Group.ir

۵۰ پرسش پایان ترم دانشگاههای سراسری استان تهران

۱ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

قرار دهید $D=\left\{(x,y): x\le y^{2}\le 3x, y\le x^{3}\le 2y\right\}$ و انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_D \frac{x^4}{y}dxdy$$

۲ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

اگر M کره واحد باشد، مقدار انتگرال روبرو را حساب کنید.
$$\iint_M (x^2+2y^2)dS$$

۳ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

www.Amad-Group.ir

از بین همه مکعب‌مستطیل‌های ممکن با قطر اصلی برابر ۳ و مساحت جانبی ۱۶ کدام‌یک بیش‌ترین حجم را دارد؟

۴ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

می‌دانیم مساحت مثلث با اضلاع a، b و c برابر است با $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ که در آن $p=\frac{a+b+c}{2}$.

الف) مثلث با اضلاع $a=5$، $b=6$ و $c=7$ به گونه‌ای تغییر می‌کند که مساحت آن ثابت می‌ماند. نشان دهید برای تغییرات کوچک اضلاع، مقدار c تابعی مشتق‌پذیر از a و b است.

ب) مقدار c را با تقریب خطی برای $a=4/99$ و $b=6/02$ تخمین بزنید.

۵ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید رویه‌ای هموار S مرز ناحیه‌ای کران‌دار در فضای سه‌بعدی و $\hat{N}$ میدان عمود یکه رو به خارج بر آن است. نشان دهید $\iint_S \hat{N}dS$ برابر بردار صفر است. (راهنمایی: انتگرال را در یک میدان ثابت دلخواه ضرب داخلی کنید)

۶ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مقدار ماکزیمم $\oint_C F.dr$ برای $F = xy^۲i + (۳z - xy^۲)j + (۴y - x^۲y)k$ به ازای کدام منحنی بسته ساده C در صفحه $x + y + z = ۱$ که از بالا روی محور z خلاف عقربه‌های ساعت جهت‌دار است به‌دست می‌آید؟

۷ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $\iint_R (x + y)dA$ که در آن R ناحیه واقع در ربع اول درون قرص $x^۲ + y^۲ \le a^۲$ و زیرخط $y = \sqrt{۳}x$ است.

۸ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مقدار انتگرال سه‌گانه $\iiint_D ydV$ را بیابید که در آن D ناحیه درون رویه $r = z(۲ + \cos\theta)$ و محدود به صفحات $z = ۰$ و $z = ۲$ است.

۹ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید C خم بسته ساده پادساعتگرد در صفحه xy باشد که ناحیه‌ای مانند R را احاطه کرده است و از مبدأ نمی‌گذرد. نشان دهید:

$$\oint_C -\frac{y}{x^۲ + y^۲}dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲}dy = \begin{cases} ۰ & \text{اگر مبدأ بیرون R باشد} \\ ۲\pi & \text{اگر مبدأ درون R باشد} \end{cases}$$

ب) اگر $F = (y + z\cos(xz), x, x\cos(xz))$ باشد، مقدار انتگرال $\oint_C F.dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری روبه‌رو است:

$$\gamma(t) = (e^{\cos(\pi t^۲)}, (۱ - ۲t)e^{\cos(\pi t) + \sin(\pi t)}, \cos(\pi t)), ۰ \le t \le ۱$$

www.Amad-Group.ir

۱۰ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید $F = (x^۲ + y + ۲ + z^۲, e^{x^۲} + y^۲, ۳ + x)$. اگر $a > ۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az + ۳a^۲$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S (رو به خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می‌گذرد حساب کنید.

۱۱ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

الف) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید:

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \sqrt{۳}\pi a^۲$$

که در آن C اشتراک رویه‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ و $x + y + z = ۰$ با جهت‌دهی مناسب است.

ب) اگر $W = \{(۲a + b, ۳b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ باشد، نشان دهید W زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است.

www.Amad-Group.ir

۱۲ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

حاصل $\iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)}dxdy$ که در آن D محدود به ناحیه زیر است را محاسبه کنید.

$D: y=-\frac{1}{2}x\ ,\ y=-\frac{1}{2}x+1,\ y=x-1,\ y=x$

۱۳ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مقدار انتگرال روبرو را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}dxdy$$

۱۴ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مقدار کار انجام شده ($\int F.dr$) توسط میدان برداری $F=\sin y\vec{i}+(x\cos y+\cos z)\vec{j}-y\sin z\vec{k}$ روی مسیر C به معادله $r(t)=(\sin t\ ,\cos t\ ,2t)$، $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ را بیابید.

۱۵ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید s، استوانه $x^2+y^2=a^2$، $0\le z\le h$ همراه قاعده بالایی‌اش ($z=h\ ,x^2+y^2\le a^2$) باشد. اگر $F=-y\vec{i}+x\vec{j}+x^2\vec{k}$، مطلوب است $\iint_S curlF.ndV$ که در آن n بردار قائم خارجی S است.

۱۶ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $\iint_S F.ndV$ که در آن $F=(2xz)\vec{i}+(1-4xy^2)\vec{j}+(2z-z^2)\vec{k}$ و S رویه جسم محصور به سهمیگون $z=6-2x^2-2y^2$ و صفحه xy است.

۱۷ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $F=(xy^2+x^2)\vec{i}+(4x-1)\vec{j}$ روی مثلث با رأس‌های $(0,3)$ و $(0,0)$ و $(-3,0)$ بررسی کنید.

۱۸ تهران / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

Ω ناحیه محدود به رویه Γ به معادله $z-a=-\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ a>0$ در بالای صفحه xy بوده و $F=x(z-a)\vec{i}+y(z-a)\vec{j}$ می‌باشند. انتگرال رویه‌ای مقابل را حساب کنید. $\phi=\oiint_{\Gamma}\vec{F}.\vec{n}\,ds$

۱۹ تهران / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

ناحیه $A=\{(x,y)\ ;1\le x^2+y^2\le 4\ ,\ y\ge 0\}$ را در نظر بگیرید. اگر منحنی C مرز ناحیه A باشد به‌طوری که جهت مثبت آن در جهت مثبت مثلثاتی می‌باشد، انتگرال منحنی‌الخط زیر را به‌دست آورید.

$$I=\oint_C (e^{x^2}+y)dx+(\arctan y+3x)dy$$

گروه آموزشی آمد
www.Amad-Group.ir

۲۰ تهران / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

انتگرال دوگانه روبرو را حساب کنید. $I=\int_{0}^{1}\int_{\sin x}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dxdy$

۲۱ تهران / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در همه نقاط به‌دست آورید.

ب) مقادیر $f_{xy}(0,0)$ و $f_{yx}(0,0)$ را محاسبه کنید.

www.Amad-Group.ir

۲۲ دانشگاه الزهرا (س) / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

طول خم $x=e^t\sin t\ ,\ y=e^t\cos t$ را برای $0\le t\le\pi$ محاسبه کنید.

۲۳ دانشگاه الزهرا (س) / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

الف) معادله پارامتری خط گذرنده از نقطه $(2,-3,5)$ و عمود بر بردارهای $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ و $\vec{B}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ را بدست آورید.

ب) معادله صفحه گذرنده از نقاط $P_0(3,-2,1)$ و $P_1(-3,4,1)$ و عمود بر صفحه $4x-2y+z=7$ را بدست آورید.

۲۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

در صورتی که C منحنی حاصل از برخورد استوانه $x^2+y^2=4x$ و صفحه $z=x+y$ باشد، به کمک قضیه استوکس کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(y^2+z)\vec{i}+(z^2+x)\vec{j}+(x^2+y)\vec{k}$ روی C را بیابید.

۲۵ دانشگاه شهید بهشتی / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

فرض کنید C منحنی بسته، تکه تکه هموار و ساده‌ای باشد که در صفحه‌ای با بردار قائم و یکه $n=(a,b,c)$ قرار دارد. ثابت کنید مساحت ناحیه سطح محدود به خم از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}\int_C(bz-cy)dx+(cx-az)dy+(ay-bx)dz$$

۲۶ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

میدان برداری $F=(xz,yz,z^3-1)$ و رویه S با معادله $x^2+y^2+z^2=4$ و $z\ge0$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال $\iint_S F.NdS$ را محاسبه نمایید، که در آن N بردار نرمال یکه نیم کره و جهت آن رو به بالا است.

۲۷ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

مساحت آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=2$ که درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد، را محاسبه نمایید.

۲۸ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_{y^2}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dxdy$.

۲۹ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

فرض کنید W ناحیه محدود به کره $x^2+y^2+z^2=15$ و درون هذلولی‌وار $x^2+y^2-z^2=1$ است. کران‌های $\iiint_W dV$ را در مختصات کروی بیان کنید (محاسبه انتگرال لازم نیست).

۳۰ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق پیوسته و C خمی بسته، ساده (غیر خودمتقاطع) و قطعه قطعه هموار با جهت‌دهی مثبت در $\mathbb{R}^2$ است که از مبدأ نمی‌گذرد. اگر D ناحیه محصور شده توسط C باشد، مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\oint_C xf\ln(x^2+y^2)dx+yf\ln(x^2+y^2)dy$ به قسمی که:

الف) مبدأ بیرون ناحیه D باشد؛

ب) مبدا درون ناحیه D باشد.

۳۱ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

www.Amad-Group.ir

فرض کنید رویه S با معادله $z=f(x,y)$ بر ناحیه $x\in[-1,1]$ و $y\in[-1,1]$ تعریف شده و N بردار نرمال یکه S و رو به بالا است. بعلاوه فرض کنید منحنی C مرز رویه S باشد، خمی با جهت‌دهی مثبت ناشی از بردار N (یعنی جهت خم C و بردار N از قاعده دست راست پیروی می‌کند). اگر $F=(x^2,x,z^2)$، نشان دهید:

$$\oint_C F.dr=4$$

۳۲ دانشگاه صنعتی امیرکبیر / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

فرض کنید $P_3=\{f(x)=a+bx+cx^2+dx^3\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$، فضای برداری متشکل از تمامی چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی ۳ با ضرایب حقیقی است. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$T:P_3\to\mathbb{R}^3,\ T(f(x))=(2f(0)+4f'(0),f(0)+2f'(0),f''(1))$$

الف) نشان دهید T یک تبدیل خطی است.

ب) پایه‌ای برای $Ker(T)$ بیابید.

ج) پایه‌ای برای $Im(T)$ بیابید.

۳۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

مطلوبست محاسبه جرم کل جسمی که ناحیه D واقع در صفحه xoy محصور بین منحنی‌های $y^۲ = x$، $y^۲ = ۲x$، $x^۲ = ۳y$ و $x^۲ = ۴y$ را اشغال نموده و چگالی هر نقطه آن تابع $\delta(x,y) = e^{\frac{۲x^۳ - ۳y^۳}{xy}}$ می‌باشد.

۳۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴ (B)

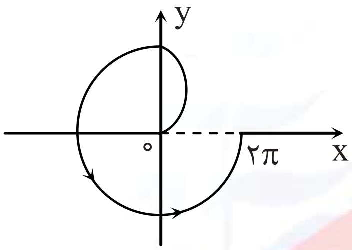
به کمک قضیه دیورژانس و با استفاده از انتگرال سطح، حجم ناحیه محصور بین سهمی‌گون $z = ۴x^۲ + ۷y^۲$ و $z = ۹ - ۵x^۲ - ۲y^۲$ را بیابید.

۳۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴ (B)

M ناحیه سه بعدی محصور از پایین به سطح کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و از بالا به مخروط $(z-۱)^۲ = ۳(x^۲ + y^۲)$ است. انتگرال سه گانه $\iiint_M z\,du$ را محاسبه کنید.

۳۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴ (B)

فرض کنید C، نمودار تابع $r = \theta$ که $۰ \le \theta \le ۲\pi$ باشد؛ به کمک قضیه گرین انتگرال $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ را که در آن $\vec{F} = -y^۳\vec{i} + x^۳\vec{j}$ محاسبه کنید.



۳۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴ (B)

فرض کنید σ بخشی از استوانه $z = e^y$ باشد، که در یک‌هشتم اول فضا واقع است. همچنین تصویر قائمش بر صفحه xoz، مستطیل $۱ \le z \le ۳$، $۰ \le x \le ۲$ باشد. مطلوبست محاسبه مساحت سطح σ.

۳۸ دانشگاه شهید بهشتی / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

فرض کنیم که S سطحی از سهمی گون $z = x^۲ + y^۲$ باشد که $z \le ۱$. مطلوب است محاسبه انتگرال رویه‌ای $\iint_S \text{curl}\,F .n\, d\sigma$ که در آن F میدان برداری $F(x,y,z) = (-yze^z, xze^z, xye^y)$ و n قائم یکه بر سطح S است.

www.Amad-Group.ir

۳۹ دانشگاه شهید بهشتی / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

الف) نشان دهید اگر f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد، آنگاه

$$\text{div}(f\nabla f) = \|\nabla f\|^۲ + f\Delta f$$

ب) با کمک گرفتن از تساوی قبل ثابت کنید که معادله دیفرانسیل $\begin{cases}\Delta f = 0 & \Omega \text{ درون} \\ f = 0 & \partial\Omega \text{ روی}\end{cases}$، تنها جواب $f = 0$ را دارد. جایی که $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ حجمی است که سطح بیرونی آن را $\partial\Omega$ نامیده‌ایم.

۴۰ دانشگاه شهید بهشتی / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

ثابت کنید برای هر $a > 0$ و تابع پیوسته دلخواه $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داریم:

$$\iint_{|x|+|y|\le a} f(x+y)\,dxdy = a\int_{-a}^{a} f(u)\,du$$

۴۱ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

منحنی C به معادله مقابل داده شده است، مطلوبست محاسبه انحنای منحنی C در $t = \frac{\pi}{2}$.

$$C:\begin{cases} x = t\sin t + \cos t \\ y = t\cos t - \sin t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \end{cases}$$

۴۲ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\int_0^2\int_0^{2-x} e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dydx$

ب) $\int_0^2\int_x^2 y^2\sin(xy)\,dydx$

۴۳ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

حاصل انتگرال $\oint_C (x^3 - y^3)dx + (e^{y^2} + x^3)dy$ را که در آن C منحنی بسته متشکل از $y = \sqrt{1-x^2}\,, y = \sqrt{3}x\,, y = x$ و در جهت مثلثاتی می‌باشد را به کمک قضیه گرین بیابید.

www.Amad-Group.ir

۴۴ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

مطلوبست محاسبه انتگرال $\iiint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dV$ که در آن D ناحیه محصور بین دو کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع‌های ۱ و ۲ است.

۴۵ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

نشان دهید که $\vec{F} = (e^x\cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x\sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ یک میدان نگهدار (پایستار) است، سپس تابع پتانسیل آن را یافته و انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$I=\int_{(0,0,1)}^{(0,\frac{\pi}{2},-2)}(e^x\cos y+yz)dx+(xz-e^x\sin y)dy+(xy+z)dz$$

۴۶ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی / پایان‌ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳

مساحت قسمتی از صفحه $z=2x$ که درون سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ واقع است را بیابید.

۴۷ تهران / پایان ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳

میدان برداری $F(x,y,z)=(x^2+yz,e^y+e^z-2xy,xy-ze^y)$ و رویه S به معادله $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2=x\le 1\}$ را در نظر بگیرید. اگر N بردار قائم یکه خارجی (برون‌سو) بر S باشد، انتگرال $\iint_S F.NdS$ را محاسبه نمایید.

۴۸ تهران / پایان ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳

حجم بخشی از کره $x^2+y^2+z^2\le a^2$ که بین رویه‌های $z^2=\frac{x^2+y^2}{3}$ و $z^2=3(x^2+y^2)$ در ناحیه $z\ge 0$ قرار می‌گیرد، را به‌دست آورید.

۴۹ تهران / پایان ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳

www.Amad-Group.ir

ماکزیمم حجم مکعب مستطیلی را بیابید که در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات xyz قرار داشته و سه وجه آن صفحات مختصات می‌باشد و یک رأس آن روی بیضوی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{27}+\frac{z^2}{9}=1$ قرار داشته باشد.

۵۰ تهران / پایان ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳

فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و z نیز تابعی از متغیرهای مستقل x و y باشد و اگر رابطه $x-y=f(z-x,z-y)$ برقرار باشد، مجموع روبرو را بیابید. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$

گروه آموزشی آماد ۹۳۴۳۶۴۳۳۳۹
www.Amad-Group.ir